

Completeness of Temporal Logic Systems

Introduction to Scientific Work - MAT0148

Ivan Kuvasney Lima – N^o USP 9793291

Orientador: Rogério Augusto dos Santos Fajardo

2021

- O que é a lógica modal?
 - Mundos possíveis ou visões de mundo/pontos de vista
 - Relações entre os mundos
- “Hoje está frio.”
 - “Possivelmente, hoje está frio.”
 - “Necessariamente, hoje está frio.”
- E o que é lógica temporal?
 - Instantes de tempo
 - “Amanhã fará frio” ou “No futuro, fará frio”
 - “Nunca fez tanto calor quanto agora.”

- Alfabeto
 - Lógica Proposicional
 - Fórmulas atômicas p_i
 - Operadores usuais (\neg , \wedge , \vee , \rightarrow e \leftrightarrow)
 - \top e \perp
 - Expressividade limitada
 - Necessidade e possibilidade
 - \square e \diamond

- Estruturas e Modelos de Kripke
 - $\langle W, R \rangle$
 - W conjunto dos mundos possíveis
 - R relação de acessibilidade entre mundos
 - $V : \mathcal{L} \rightarrow 2^W$ valoração
 - Leva cada fórmula atômica ao conjunto de mundos onde ela é verdadeira
 - $V(\neg A) = W \setminus V(A)$;
 - $V(A \vee B) = V(A) \cup V(B)$;
 - $V(\Box A) = \{w \in W : w' \in V(A), \text{ para todo } w' \in W \text{ tal que } wRw'\}$;
 - $V(\Diamond A) = \{w \in W : w' \in V(A), \text{ para algum } w' \in W \text{ tal que } wRw'\}$.
 - $\Diamond A = \neg \Box \neg A$ e $\Box A = \neg \Diamond \neg A$

- Sistema de Axiomas K
 - Tautologias proposicionais
 - $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$
 - Regras de Inferência
 - Modus Ponens
 - Substituição Uniforme
 - Necessitação
 - Fórmulas consistentes
 - Conjunto Maximalmente Consistente: Conjunto $\{A_i\}$ de fórmulas, maximal com relação a inclusão, tal que qualquer conjunção $A_{i_1} \wedge \dots \wedge A_{i_k}$ é consistente.

Lógica Modal

Correção e completude

- Correção: Todo teorema é válido em qualquer estrutura da classe;
- Completude: Uma fórmula válida em todas as estruturas da classe é um teorema;
 - Para toda fórmula A consistente, existem um modelo $\langle W, R, V \rangle$ e $w \in W$ tais que $w \in V(A)$.
 - Modelo Canônico
 - W é o conjunto dos conjuntos maximalmente consistentes;
 - R é tal que wRw' se, e somente se, para toda fórmula A , se $\Box A \in w$, então $A \in w'$;
 - $V(p) = \{w \in W : p \in w\}$.

- $\langle W, R_1, R_2, \dots, R_n \rangle \implies \Box_1, \Box_2, \dots, \Box_n$ e $\Diamond_1, \Diamond_2, \dots, \Diamond_n$
- $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ operadores k_i -ários $\implies R_{\Delta_1}, \dots, R_{\Delta_n}$ relações $(k_i + 1)$ -árias

Lógica Temporal

Introdução

- $\langle T, <, > \rangle$ ou $\langle T, < \rangle$
 - $\diamond_{<} = F, \diamond_{>} = P, \square_{<} = G$ e $\square_{>} = H$
- “Desde que tomei a segunda dose, choveu todo dia”
- Operadores binários U e S (“Until” e “Since”)
 - $V(U(A, B)) = \{t \in T : \exists s, t < s, \text{ tal que } s \in V(A) \text{ e, } \forall x \in T \text{ com } t < x < s, x \in V(B)\};$
 - $V(S(A, B)) = \{t \in T : \exists s, s < t, \text{ tal que } s \in V(A) \text{ e, } \forall x \in T \text{ com } s < x < t, x \in V(B)\};$
 - $FA = U(A, \top), PA = S(A, \top), GA = \neg F\neg A$ e $HA = \neg P\neg A$

Observação

Relações 3-árias R_U e R_S ($(t, s, x) \in R_U \Leftrightarrow t < x < s$)

- $V(U(A, B)) = \{t \in T : \exists s \in V(A) \text{ tal que } x \in V(B), \forall x \text{ com } (t, s, x) \in R_U\}$

- Sistema de Axiomas B

A1a) $G(p \rightarrow q) \rightarrow (U(p, r) \rightarrow U(q, r));$

A2a) $G(p \rightarrow q) \rightarrow (U(r, p) \rightarrow U(r, q));$

A3a) $p \wedge U(q, r) \rightarrow U(q \wedge S(p, r), r);$

A4a) $U(p, q) \wedge \neg U(p, r) \rightarrow U(q \wedge \neg r, q);$

A5a) $U(p, q) \rightarrow U(p, q \wedge U(p, q));$

A6a) $U(q \wedge U(p, q), q) \rightarrow U(p, q);$

A7a) $(U(p, q) \wedge U(r, s)) \rightarrow (U(p \wedge r, q \wedge s) \vee U(p \wedge s, q \wedge s) \vee U(q \wedge r, q \wedge s)).$

Aib) Imagem espelhada de Aia

- Necessitação em G e em H

- Correção
- Completude
 - Modelo Canônico
 - Definição da relação à partir de \square
 - Definir a partir de G ?
 - Problema com U e S
 - Construimos uma função f , identificando conjuntos maximalmente consistentes com números racionais

Lógica Temporal







Fluxos de tempo bem-ordenados

(L) $H\perp \vee PH\perp$;

(W) $Fp \rightarrow U(p, \neg p)$;

- Correção
- Completude
 - Lógica de primeira-ordem
- Fluxos de tempo isomorfos a \mathbb{N}

Bibliografia

-  Fajardo, Rogério A. *Lógica Matemática*, Edusp, 1ª edição, 2018.
-  Fajardo, Rogério A. *Combinação de Lógicas Modais Não-normais*, 2004.
-  Burgess, John P. *Axioms for Tense Logic: I. “Since” and “Until”*, Notre Dame Journal of Formal Logic, **vol 23, nº 4** (1982), 367–374.
-  Blackburn, Patrick; Rijke, Maarten de; Venema, Yde. *Modal Logic*, Cambridge University Press, 1ª edição, 2001.
-  Venema, Yde. *Completeness via completeness: Since and Until*. In: Rijke, Maarten de. *Diamonds and Defaults*, Kluwer Academic Publishers, 1ª edição, 1993, 349–358
-  Gabbay, Dov M.; Hodkinson, Ian; Reynolds, Mark. *Temporal Logic: Mathematical Foundations and Computational Aspects*, Oxford University Press, 1ª edição, 1994.